Calculus Renis sinistri

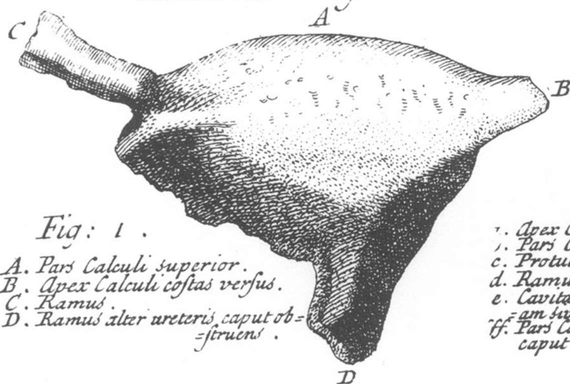


Fig: 1.

A. Pars Calculi superior.
B. Apex Calculi costas versus.
C. Ramus.
D. Ramus alter ureteris caput ob=struens.

Calculus Renis dextri

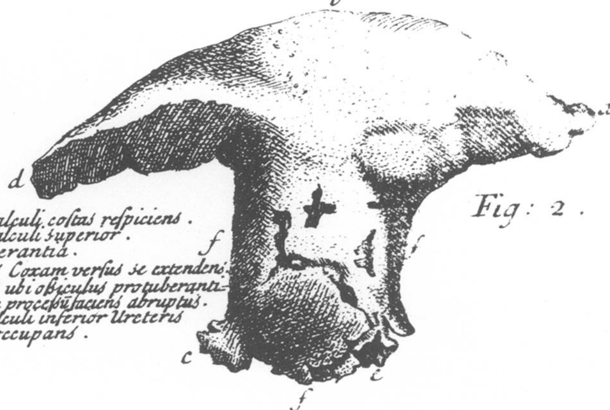


Fig: 2.

. Apex Calculi costas respiciens.
. Pars Calculi superior.
c. Protuberantia.
d. Ramus Coxam versus se extendens.
e. Cavitas ubi ossiculus protuberanti=am sive processū faciens abruptus.
ff. Pars Calculi inferior Ureteris caput occupans.

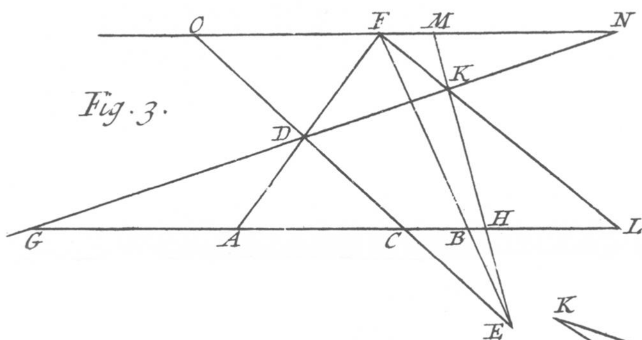


Fig. 3.

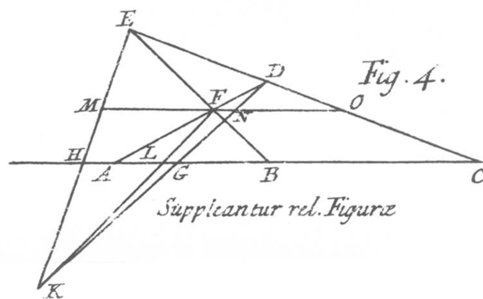


Fig. 4.

Suppleantur rel. Figuræ

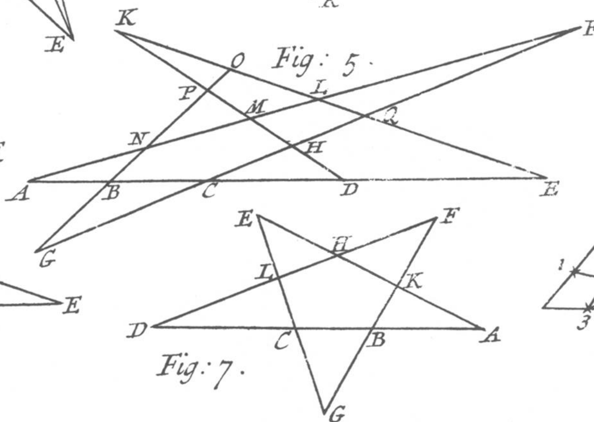


Fig: 5.

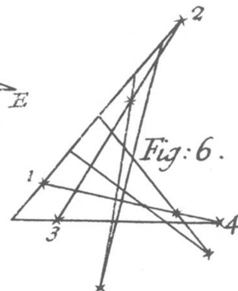


Fig: 6.

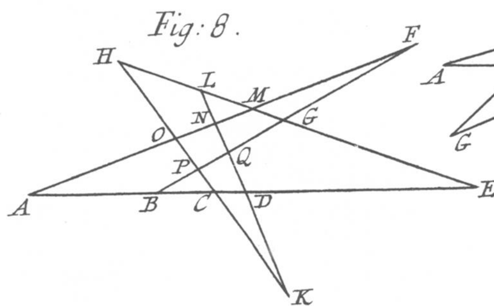


Fig: 8.

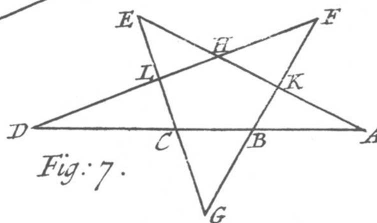


Fig: 7.

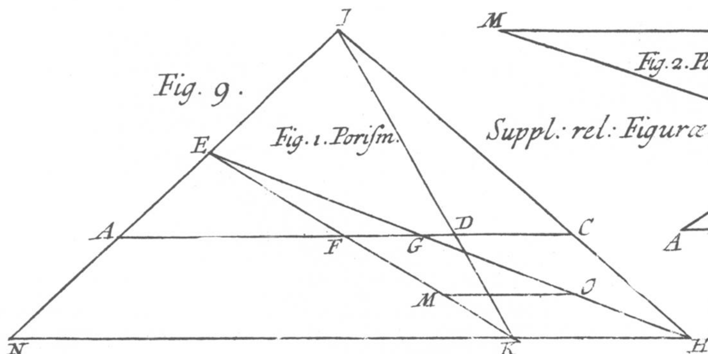


Fig. 9.

Fig. 1. Porism.

Suppl.: rel.: Figuræ

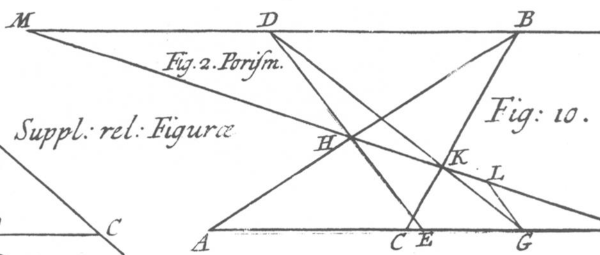


Fig: 10.



Fig. 11.

VI. Pappi Alexandrini *Propositiones duæ generales, quibus plura ex* Euclidis *Porismatis complexus est, Restitutæ a Viro Doctissimo* Rob. Simson, *Math. Prof.* Glasc. *Vid.* Pappi *præfationem ad Lib. 7. Coll. Math.* Apollonii *de Sectione rationis libris duobus a Clariss.* Hallejo *præmissam* pag. VIII. & XXXIV.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου ἢ παραλλήλου, &c.

Textus Pappi, qui in hac & sequente Propositione injuria temporis truncatus est, hoc modo Restituendus videtur.

" [SI duæ rectæ lineæ in duas rectas lineas sibi mutuo occurrentes vel inter se parallelas ducantur,] & dentur in una earum tria [a] puncta [vel duo, si recta in qua sunt, parallela fuerit alicui ex tribus reliquis] : cætera vero puncta præter unum [b] tangant rectam positione datam, etiam hoc quoque tanget rectam positione datam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet vero proposito rectarum numero ignoratur, quamvis vera sit, hujusmodi Propositio. " Si quotcunque rectæ occurrant inter se, nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem

[a] *Tria puncta*] intersectionum sc. [b] *Tangant rectam*] i. e. unum punctum tangat unam aliquam rectam positione datam, & aliud tangat aliam positione datam, &c.

" autem punctum in aliâ tangat rectam positione da-
" tam ;" vel generalius sic. Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque sint plures quam duæ per idem punctum, omnia vero puncta in earum unâ data sint ; reliquorum numerus erit numerus triangularis, cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione datam tangentium ; quarum intersectionum si nullæ tres existant ad angulos trianguli spatii, [nullæ quatuor ad angulos quadrilateri, nullæ quinque, &c. i. é. universim, si nullæ harum intersectionum in orbem redeant] unaquæque intersectio reliqua tanget positione datam. Propositio prima in decem dividitur casus, monente ipso Pappo, quorum ejus, in quo nullæ ex quatuor rectis sunt inter se parallelæ, neque rectæ positione datæ per data puncta transeunt, demonstrationem hic apponemus ; hic enim Casus inter omnes maximè est generalis, ejusque demonstratio secundæ propositionis demonstrationi omnino est necessaria. (*Fig.* 3. & 4.) Sint igitur quatuor rectæ A B, A D, B E, C E. Et data sint tria puncta intersectionum A, B, C in earum qualibet, reliquarum vero intersectionum D, E, F, una D tangat rectam G K positione datam, alia E tangat rectam H K positione datam ; tanget etiam reliqua F rectam positione datam. Ducatur per F recta M F parallela ad A B, quæ occurrat ipsis H K, K G, C E, in M, N, O. Quoniam igitur data est ratio H B ad B C dabitur eidem æqualis ratio M F ad F O, & quoniam datur ratio A C ad A G, dabitur eidem æqualis ratio F O ad F N ; quare datur ratio M F ad F N, igitur si jungatur F K, quæ occurrat ipsi A B in L, dabitur ratio H L ad L G ; & datur H G positione & magnitudine ; quare punctum L datur, & datum est punctum K, igitur K L positione datur.

Sit igitur H L ad L G in ratione composita ex rationibus H B ad B C & A C ad A G, & jungatur K L,

erit

erit hæc recta quam tangit punctum F, hoc eſt, ſi ducatur quævis CE, poſitione datis occurrens in D, E, & jungantur AD, BE ſibi mutuo occurrentes in F; recta erit linea quæ per K, F, L tranſit. Nam per F ducatur MF parallela ipſi AB, & quoniam ratio MF ad FN compoſita eſt ex rationibus MF ad FO & FO ad FN, hoc eſt, ex rationibus HB ad BC & AC ad AG, ex quibus etiam componitur ratio HL ad LG; erit HL ad LG ut MF ad FN, & igitur HG ad MN, hoc eſt, HK ad MK ut HL ad MF: Quare recta eſt linea quæ per K, F, L tranſit, per 14. 1 aut 32. 6 Elem.

Explicatio Secundæ Propoſitionis.

Obſervandum hic eſt, Numerum interſectionum, quæ in una recta reperiuntur in quâcunque propoſita multitudine rectarum, quarum non plures quam duæ per idem punctum tranſeunt, & quarum nullæ ſunt inter ſe parallelæ, unitate minorem eſſe ipſo numero rectarum: Nam duæ in unico puncto ſe invicem ſecant, tertia vero ducta priores in duobus, quarta priores in tribus punctis ſecat, &c. Et igitur numerus interſectionum in tribus rectis eſt unitas binario aucta, i. e. ternarius; numerus eorundem in quatuor rectis eſt ternarius ternario auctus; in quinque vero rectis eſt ultimus præcedens ſeu ſenarius quaternario auctus, &c. in infinitum; Qui numeri, ut manifeſtum eſt, triangulares ſunt, quorum cujuſque latus eſt numerus interſectionum, quæ inveniuntur in unâ qualibet recta, i. e. numerus qui unitate minor eſt numero omnium rectarum. Igitur ſi ex hoc numero omnium interſectionum dematur numerus omnium punctorum datorum, qui idem eſt cum numero interſectionum in una quâvis recta; reliquus erit adhuc triangularis, cujus latus

tus

tus sc. unitate deficit a latere prioris, quod exhibet numerum omnium punctorum, & proinde binario minus est numero rectarum propositarum. Et hic est numerus intersectionum quas tangere rectam positione datam *Pappus* in hac Propositione requirit, quarumque si nullæ tres sint ad angulos trianguli; [nullæ quatuor ad angulos [c] quadrilateri & ita deinceps;] unamquamque intersectionem reliquam tangere rectam positione datam affirmat. Quæ autem uncis inclusa sunt, textui necessitate coacti adjecimus, nam sine iis propositio vera non esset extra casum quinque rectarum.

Commode vero in duos casus dividitur propositio; quos etiam aperte satis indicat *Pappus*, qui Hypothesin casus facilioris propositioni hujus generis universalissimæ simul & elegantissimæ præmittit.

CASUS PRIMUS.

Si quotcunque rectæ occurrant inter se nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint puncta omnia in earum unâ, unumquodcunque autem punctum in alia tangat rectam positione datam; unaquæque intersectio reliqua tanget rectam positione datam. Sint enim quotcunque rectæ, (*Fig.* 5.) *ex. gr.* sex A F, B G, C H, D K, E L, E A; & data sint omnia puncta in earum unâ, sc. A, B, C, D, E; omnia vero puncta in aliâ sc. F, L, M, N, tangant rectam positione datam: unaquæque reliqua intersectio tanget positione datam.

Sumatur enim quævis ex reliquis *ex. gr.* O, & quoniam quatuor sunt rectæ O L, O N, A N, A B, & data sunt tria puncta in unâ earum sc. A, B, E, reliqua

G g g vero

---

c Intelliguntur etiam hic figuræ quarum latera se mutuo decussant Diagonalium instar, æque ac cæteræ.

vero præter unum O, viz. ipſa L, N tangunt rectam poſitione datam, tanget etiam O poſitione datam per *Prop.* I. Eodem modo idem de omnibus reliquis oſtendetur.

CASUS SECUNDUS.

Cæteris manentibus jam non ſint omnia puncta rectam poſitione datam tangentia (quorumque numerus binario minor eſt numero rectarum propoſitarum) in eâdem recta, ſed nulla eorum in orbem redeant; oſtendendum eſt reliqua omnia tangere rectam poſitione datam.

LEMMA I.

Si quotcunque rectæ inter ſe occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, & ſumantur quævis rectarum, ſit vero numerus interſectionum, qui conficitur ſumendo duo puncta in unaquâque rectarum ſumptarum æqualis numero harum rectarum; puncta hæc in orbem redibunt. Nam quoniam ſunt duo puncta in unaquâque recta, erunt ad minimum tria in duabus rectis, & quatuor in tribus & ita deinceps; ſemper ſc. erit numerus punctorum ad minimum unitate major numero rectarum niſi recta ultima tranſeat per punctum primum; i. e. niſi rectæ in orbem redeant, in quo ſolo caſu æqualis erit numerus punctorum numero rectarum.

LEMMA II.

Si quotcunque rectæ inter ſe occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, ſumantur vero quælibet ipſarum interſectiones, quarum numerus numero omnium

um rectarum æqualis sit; vel hæ intersectiones omnes, vel earum aliquæ, in orbem redibunt, seu invenientur ad angulos polygoni vel trianguli.

Nam tres intersectiones trium rectarum sunt ad angulos trianguli; si vero sint quatuor rectæ, & sumantur quatuor puncta, una harum necessario invenietur in unâquaque recta; quod si in unâ aliqua ex quatuor rectis unum tantum inveniatur punctum, tria reliqua erunt in tribus reliquis rectis, & igitur ad angulos trianguli: Si vero nulla fuerit recta, in qua unum duntaxat punctum invenitur, erunt duo in unâquaque ex quatuor rectis, & sunt quatuor puncta, ergo per *Lem.* 1. sunt ad angulos quadrilateri. Et manifestum est si fuerint quatuor rectæ, & sumantur plura quam quatuor puncta, multo magis aliqua eorum in orbem redire.

Sint jam quinque rectæ, & sumantur quinque intersectionum puncta, &, si fuerit aliqua ex rectis in qua nullum invenitur punctum ex hisce quinque, erunt omnia quinque in quatuor reliquis rectis; Si vero fuerit aliqua recta in quâ unum duntaxat invenitur punctum, erunt reliqua quatuor puncta in reliquis quatuor rectis; igitur in utroque casu puncta aliqua erunt ad angulos trianguli, vel quadrilateri, per præcedentem casum: Si autem nulla fuerit recta in qua vel nullum vel unicum invenitur punctum, erunt duo in unâquaque ex quinque rectis, & sunt quinque puncta, ergo per *Lem.* 1. sunt ad angulos quinquelateri. Eodem prorsus ratiocinio ostendetur in sex rectis & ita in infinitum.

In *Fig.* 6. sunt octo rectæ, & octo sumuntur puncta, quorum quatuor in orbem redeunt.

Hisce præmissis propositio hoc modo demonstratur. Primo sint quinque rectæ (*Fig.* 7.) A D, A E, B F, C G, D H, & demptis punctis datis in una rectarum, viz. A, B, C, D,

 reliqua

reliqua erunt sex puncta E, F, G, H, K, L, in quatuor rectis, & tria horum (nam latus numeri triangularis 6 est 3) quæ non sunt ad angulos trianguli, a tribus sc. rectarum propositarum contenti, *ex. gr.* E, F, G, tangant rectam positione datam; ostendendum est reliqua tria K, H, L etiam tangere rectam positione datam.

Quoniam igitur sunt quatuor rectæ A E, B F, C G, D F, & tria intersectionum puncta in ipsis sumantur, viz. E, F, G; erit una aliqua harum rectarum in quâ necessario invenietur unum tantum ex hisce tribus punctis; nam secus erit vel aliqua in qua nullum est punctum, & proinde erunt tria puncta in tribus reliquis rectis, i. e. ad angulos trianguli contra Hypothesin; vel erunt ad minimum duo puncta in unâquaque quatuor rectarum, & igitur quatuor essent ad minimum puncta; sed sunt tantum tria; quare necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum: Sit hæc recta A E, in qua sc. est punctum E, ergo reliqua duo F, G, sunt in reliquis tribus rectis B F, C G, D F; igitur, quoniam dantur tria puncta B, C, D, reliquum punctum L in istis tribus rectis, tangit rectam positione datam per primam Propositionem: Sumatur nunc G E, recta sc. ex hisce tribus quæ transit per punctum E in quartâ recta, & omnia puncta in hâc recta G E tangent positione datam. Quare, per casum primum hujus propositionis, reliqua puncta K, H tangunt rectam positione datam.

Sint jam sex rectæ (*Fig.* 8.) A E, A F, B G, C H, D K, E L; & demptis quinque datis punctis A, B, C, D, E, quæ sunt in unâ rectarum, reliqua erunt decem puncta F, G, H, K, L, M, N, O, P, Q in quinque rectis; & ex Hypothesi quatuor horum, quæ non in orbem redeunt, tangunt rectam positione datam; sint hæ, F, G, H, K; & ostendendum est reliqua sex L, M, N, O, P, Q tangere rectam positione datam.

Quoniam

Quoniam igitur ſumuntur quatuor puncta interſectionum F, G, H, K, in quinque rectis A F, B G, C H, D K, E L; erit una aliqua recta in qua unum tantum ex hiſce punctis reperitur; nam ſecus erit vel aliqua in qua nullum eſt punctum, & proinde quatuor puncta erunt in quatuor reliquis rectis, & igitur aliqua eorum in orbem redibunt per *Lem.* 2. contra hypotheſin: vel erunt duo ad minimum puncta in unaquaque quinque rectarum, & ita eſſent quinque ad minimum puncta; ſed ſunt tantum quatuor, quare neceſſe eſt eſſe aliquam rectam in quâ unum tantum invenitur punctum; ſit hæc A F in quâ ſc. eſt punctum F; ergo reliqua tria G, H, K ſunt in reliquis quatuor rectis B G, C H, D K, E L, & dantur puncta B, C, D, E; ergo per primam partem hujus demonſtrationis reliqua tria puncta in his quatuor rectis, ſc. L, P, Q, tangunt rectam poſitione datam. Sumatur nunc B F, recta ſc. ex hiſce quatuor, quæ tranſit per punctum F in quinta recta; & omnia puncta in hac recta B F tangent rectam poſitione datam: Quare per Caſum primum hujus Propoſitionis reliqua puncta M, N, O tangunt rectam poſitione datam. Eodem prorſus modo demonſtrabitur Propoſitio in ſeptem, octo, &c. rectis in infinitum, ut patet.

Quod autem conditio uncis incluſa in hac propoſitione omnino ſit neceſſaria, patet in his duobus exemplis; idem vero univerſaliter præcedentium ope demonſtrari poteſt.

His adjecit Clariſſimus Profeſſor Poriſmata duo ſequentia primi Libri Poriſmatum Euclidis *a ſe quoque reſtituta.*

Poriſma primum, Lib. 1. Poriſmatum *Euclidis*, quod ſervavit *Pappus Alexandrinus* in præfatione ad *Lib.* 7. Math. Coll. *Vid. pag.* xxxv. *Ejuſd. Præf.*

Si a duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ ad rectam poſitione datam, abſcindat autem earum una a

recta positione data segmentum dato in eâ puncto adjacens, auferet etiam altera ab aliâ recta segmentum datam habens rationem.

Sint enim duo puncta data D, C, (*Fig.* 9.) a quibus ad positione datam A B inflectantur D B, C B; quarum una D B abscindat a positione data E F segmentum K M adjacens dato puncto M: Ostendendum est alteram C B auferre ab aliâ quadam recta segmentum datam habens rationem ad ipsum K M.

Juncta C D occurrat positione datis A B, E F in A, F punctis, quæ proinde data erunt. A puncto K, in quo inflexa B D occurrit ipsi E F, ducatur K H parallela ad A D, & occurrens alteri inflexæ B C in H, ipsi vero B A in N. Quoniam igitur dantur puncta A, D, C, dabitur ratio A D ad D C, & igitur ratio N K ad K H; quare si jungatur E H occurrens ipsi A D in G, dabitur ratio A F ad F G; sed datur A F, quare & F G datur, & punctum G; & datum est E, quare E G positione & magnitudine datur; & datur E F, quare ratio E F ad E G datur; & ducta M O per datum punctum M parallela ipsi A D, & occurrens E G in O, dabitur M O positione, & ideo punctum O; & propter parallelas M O, F G, K H est M K ad O H, ut E F ad E G, quæ sunt in data ratione. Igitur recta B C aufert a rectâ E G positione data, segmentum O H dato puncto O adjacens, in datâ ratione ad segmentum M K. *Q. E. D.*

Componetur vero ita, fiat A F ad F G ut A D ad D C, & juncta E G, per M ducatur M O parallela ad A D; ostendendum est, si a punctis D, C inflectantur ad A B quævis D B, C B abscindentes ex ipsis E F, E G, segmenta M K, O H punctis M, O adjacentia, fore ipsa in data ratione E F ad E G, seu, quod idem est, esse junctam H K parallelam ipsi A D; hoc vero videtur omissum fuisse ab *Euclide*, utpote quod tribus verbis

verbis indirecte demonstrari possit; *Pappus* autem in *Lem.* 1°. ad Porisinata, duas directas ejusdem demonstrationes affert, quarum secundam, quæ paululum est corrupta apud *Commandinum*, hic subjungemus integritati suæ restitutam.

Vid. Pap. *Lib.* 7. *fol.* 239. *pag. prior.*

Per Compositam vero proportionem hoc pacto.

Quoniam est ut A F ad F G ita A D ad D C (*Vid. fig.* Papp. *fol.* 238. *pag. post. vel fig. nostr.* 9.) convertendo erit ut G F ad F A ita C D ad D A, & componendo, permutandoque & convertendo ut A D ad D F ita A C ad C G. Sed proportio A D ad D F composita est ex proportione A B ad B E, [& E K ad K F, & proportio A C ad C G composita est ex proportione A B ad B E] & proportione E H ad H G. Proportio igitur composita ex A B ad B E & E K ad K F eadem est, quæ componitur ex A B ad B E & E H ad H G. communis auferatur ratio A B ad B E, reliqua igitur E K ad K F eadem est quæ E H ad H G; quare H K ipsi A G parallela est.

Porisma Secundum. Quod punctum illud tangit rectam positione datam. Secundum Porisma videtur sequenti modo explicandum esse.

Si a duobus punctis datis C, G (*Fig.* 10.) ducantur duæ rectæ C B, G D occurrentes duabus rectis positione datis A B, E D, sitque recta D B puncta intersectionum jungens parallela ipsi C G, quæ per datum punctum ducitur, intersectio K ductarum tanget rectam positione datam.

Occurrant enim positione datæ sibi mutuo in H, & juncta K H occurrat C G in F & B D in M. Igitur propter parallelas est A E ad E F (ut B D ad D M hoc est) ut C G ad G F; & igitur A E ad C G ut E F ad G F, datur itaque ratio E F ad G F, & datur E G, quare pun-

punctum F, & datur punctum H, quare H F positione. Sit itaque ut A E ad E F ita C G ad G F, & juncta H F erit recta quam tangit punctum K; hoc est ducta quævis G D, occurrens ipsi F M in K, erit recta linea quæ per C K B transit, nam est D B ad D M ut A C ad E F, hoc est ex constructione ut C G ad G F, quare D B ad C G ut (D M ad G F hoc est ut) D K ad K G, & igitur est C K B recta linea.

Pappus idem aliter demonstrat in 2do *Lemmate*, quod hoc modo debet legi: sc. Ducatur per G, (*Vid. Fig.* Pap. *fol.* 239. *pag. post. vel Fig. nostr.* 10.) recta linea G L parallela D E, & juncta H K ad L producatur. Quoniam igitur est ut A E ad E F ita C G ad G F, & permutando [A E ad C G ut E F ad G F]; ut autem A E ad C G ita est E H ad G L, [d] quod duæ duabus sunt parallelæ. Ut igitur E F ad F G ita E H ad G L, atque est E H parallela ipsi G L, ergo recta linea est quæ per H K L F transit.

---

[d] *Quod duæ duabus sunt parallelæ*, sc. A E ad D B, & G L ad D E, unde est A E ad D B ut E H ad D H, & est D B ad C G (ut D K ad K G, i. e.) ut D H ad L G; ergo per 22. 5. est A E ad C G ut E H ad G L.
